数理解析研究所講究録
256巻 1975年 97-109

Reductive algebra について

東北大 教養 御園生善尚

$\mathfrak{A}$をヒルベルト空間H上の単位元をもつ弱閉な有界作用素のalgebraとする．$\mathfrak{A}$で不変なHの任意の部分空間が$\mathfrak{A}$を約するとき，$\mathfrak{A}$を<u>reductive</u>であるという．有界作用素の不変部分空間問題と関連して，いわゆる*transitive algebra problem*がある．この問題の一般化として，Radjavi および Rosenthal は

$\mathfrak{A}$が reductive ならば$\mathfrak{A}$は self-adjoint か

という問題 ― reductive algebra problem ― を提唱した．Reductive algebra について多くの研究がなされているが[4]，まだ問題は完全に解決されていない．この報告の目的は von Neumann algebra $\mathfrak{A}' \cap (\mathfrak{A}^*)'$ に注意した考察を，Hoover [3]，Azoff [1] に従って解説することである．

<u>1</u> <u>グラフ部分空間</u> Hをヒルベルト空間，nを自然数とするとき，Hのnコピーの直和を$H^{(n)}$で表わす．AをH上の

作用素とするとき，Aのnコピーの直和として表わされる$H^{(n)}$上の作用素を$A^{(n)}$で表わす．SをH上の作用素の集合とするとき，$S^{(n)}=\{A^{(n)} \mid A\in S\}$とし，$M_n(S)$を各成分がSの要素である$n\times n$行列の集合とする．$B(H)$をH上のすべての有界作用素の作るalgebraとし，$S\subset B(H)$とするとき$(S^{(n)})'=M_n(S')$および$(M_n(S))'=S'^{(n)}$がなりたつ．Aで不変なHの部分空間の集合を$\mathrm{Lat}\,A$で表わし，$\mathrm{Lat}\,S=\bigcap_{A\in S}\mathrm{Lat}\,A$とする．$\mathrm{Lat}\,A^{(n)}$，$\mathrm{Lat}\,S^{(n)}$等も同様にして定義する．

以下，$\mathfrak{A}\ (\subset B(H))$は単位元をもつalgebraとする．このとき，次の補題がなりたつ．［4，Theorem 7.1］

<u>補題 1.1</u>　$\mathfrak{A}$の強位相に関する閉包は

$$\{B\in B(H) \mid \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)}\subset \mathrm{Lat}\,B^{(n)} \text{ for all } n\}$$

に等しい．またこれは弱位相に関する閉包に等しい．

$H^{(n)}$の自明でない部分空間 M が

$$x=(x_1\oplus x_2\oplus\cdots\oplus x_n)\in M,\ x_1=0\ \Rightarrow\ x=0$$

をみたすとき，Mを，$H^{(n)}$の<u>グラフ部分空間</u>という．このとき，$\mathcal{D}=\{x_1 \mid x_1\oplus x_2\oplus\cdots\oplus x_n\in M\}$を定義域とするH上の（必らずしも有界とは限らない）作用素$T_2,\cdots,T_n$が存在して

$$M=\{x\oplus T_2x\oplus\cdots\oplus T_nx \mid x\in\mathcal{D}\}$$

と表わせる．$T_2, \cdots, T_n$ を M に関する<u>グラフ変換</u>という．

$x = (x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n) \in H^{(n)}$ に対して，x_i を対応させる $H^{(n)}$ から H への projection を π_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) で表わす．S を $B(H)$ の部分集合とし，M を $S^{(n)}$ で不変な $H^{(n)}$ の部分空間とするとき，$\pi_1(M)$ を S の <u>characteristic manifold</u> という．($\pi_i(M)$ ($i = 2, 3, \cdots, n$) も characteristic manifold になる．)

S の characteristic manifold の集合を Char S で表わす．

$$\mathrm{Lat}\, S \subset \mathrm{Char}\, S$$

であることは明らかである．

<u>補題 1.2</u>　$\mathcal{B}$ を $\mathfrak{A}$ を含む弱閉な algebra とする．$\mathfrak{A} \subsetneqq \mathcal{B}$ とし，n を $\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)} \neq \mathrm{Lat}\,\mathcal{B}^{(n)}$ をみたす最小の自然数とすれば

$$M \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)}, \quad M \notin \mathrm{Lat}\,\mathcal{B}^{(n)}$$

をみたす $H^{(n)}$ のグラフ部分空間 M が存在する．

証明　補題 1.1 から，$M_1 \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)}$，$M_1 \notin \mathrm{Lat}\,\mathcal{B}^{(n)}$ をみたす $H^{(n)}$ の部分空間 M_1 が存在する．

$$M_2 = \{ (x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n) \in M_1 \mid x_1 = 0 \}$$

とすれば，M_2 は $\mathfrak{A}^{(n)}$ で不変な $H^{(n)}$ の部分空間であるが，$H^{(n-1)}$ の部分空間と考えることができる．このとき $M_2 \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n-1)}$ であるから仮定より $M_2 \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{B}^{(n-1)}$．すなわち $M_2 \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{B}^{(n)}$．いま $M = M_1 \ominus M_2$ とすれば，M が求めるグラフ部分空間である．

定理 1.3　$\mathfrak{A}$が自明でない characteristic manifold をもたないならば，$\mathfrak{A}$は B(H) で稠密である．

証明　補題 1.1 から

$$\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)} = \mathrm{Lat}\,B(H)^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

を示せばよい．M を自明でない $\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)}$ の元とする．補題 1.2 からグラフ部分空間として一般性を失なわない．

$$M = \{x \oplus T_2 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{D}\}$$

とする．仮定から $\mathfrak{D} = \pi_1(M) = H$ をうる．したがって，閉写像定理から，$T_2, \cdots, T_n$ は有界である．

$\lambda_i \in \sigma(T_i)$ を任意にとるとき，$T_i - \lambda_i I$ のグラフ

$$\{x \oplus (T_i - \lambda_i I)x \mid x \in H\}$$

は $\mathfrak{A}^{(2)}$ で不変であるから，$\{(T_i - \lambda_i I)x \mid x \in H\}$ は $\mathfrak{A}$ の characteristic manifold で，$\{0\}$ または H である．$\{(T_i - \lambda_i I)x \mid x \in H\} = H$ とすれば，閉写像定理から，$(T_i - \lambda_i I)^{-1} \in B(H)$ となり仮定に反する．ゆえに

$$\{(T_i - \lambda_i I)x \mid x \in H\} = \{0\}$$

すなわち　$T_i = \lambda_i I$ である．i は任意であるから

$$M \in \mathrm{Lat}\,B(H)^{(n)}$$

2　Reductive algebras　$\mathfrak{A}$を H 上の弱閉な algebra とする．$\mathfrak{A}$で不変な H の任意の部分空間が$\mathfrak{A}$を約するとき，$\mathfrak{A}$を

reductive であるという．$\mathfrak{A}$ が reductive ならば $\mathfrak{A}^* = \{A^* | A \in \mathfrak{A}\}$ および $\mathfrak{A}''$ が reductive であることが容易に示される．$\mathfrak{A}' \wedge (\mathfrak{A}^*)'$ は von Neumann algebra で，これを $\mathcal{J}(\mathfrak{A})$ または単に $\mathcal{J}$ で表わし，$\mathfrak{A}$ の invariant algebra という．

定理 2.1 $\mathfrak{A}$ が reductive で，$\mathcal{J}$ が properly infinite ならば $\mathfrak{A}$ は self-adjoint である．

証明 補題 1.1 から

$$\mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)} \leq \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{*(n)} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を示せばよい．すなわち，すべての自然数 n に対して，$\mathfrak{A}^{(n)}$ が reductive であることを示せばよい．$\mathcal{J}$ が properly infinite であるから

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = I, \quad P_i \sim I \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

をみたす互いに直交する projection $P_1, P_2, \cdots, P_n$ が存在する．ゆえに $\mathfrak{A}^{(n)}$ は $\mathfrak{A}$ とユニタリ同値で，$\mathfrak{A}$ が reductive であるから，$\mathfrak{A}^{(n)}$ も reductive である．したがって定理が証明された．

定理 2.2 $\mathfrak{A}$ が reductive で，$\mathcal{J}$ が cyclic vector をもつならば $\mathfrak{A}$ は self-adjoint である．

証明 $A \in \mathfrak{A}$，$x_i \in H$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を任意にとり

$$\mathcal{U} = \{ T \mid \|(T - A^*) x_i\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, n \}$$

とする．いま

$$\phi(T) = \sum_{i=1}^{n} (Tx_i, x_i)$$

とすれば，ϕ は $\mathcal{J}'$ 上の positive normal linear functional である．$\mathcal{J}$ が cyclic vector をもつから，$\mathcal{J}'$ は separating vector をもつ．ゆえに，すべての $T \in \mathcal{J}'$ に対して

$$\phi(T) = (Tx_0, x_0)$$

となるような $x_0 \in H$ が存在する．$\{Ax_0 \mid A \in \mathfrak{A}\}$ の閉包を M とすれば，$M \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}$ であることは明らかである．仮定から $\mathfrak{A}$ は reductive であるから，$M \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^*$．ゆえに $A^*x_0 \in M$ をうる．したがって

$$\| Bx_0 - A^*x_0 \| < \varepsilon$$

をみたす $B \in \mathfrak{A}$ が存在する．

$$\begin{aligned} \| Bx_0 - A^*x_0 \|^2 &= ((B - A^*)^*(B - A^*)x_0, x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} ((B - A^*)^*(B - A^*)x_i, x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \| (B - A^*)x_i \|^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\| (B - A^*)x_i \| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

これは $B \in \mathcal{U}$ であることを示している．$\mathfrak{A}$ は強閉であるから $A^* \in \mathfrak{A}$．$A \in \mathfrak{A}$ は任意であったから，$\mathfrak{A}$ が self-adjoint であることが示された．

Reductive algebra problem :

$\mathfrak{A}$ が reductive $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}$ は self-adjoint か？

を一歩ゆるめて,

$\mathfrak{A}$ が reductive $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}'$ は self-adjoint か?

という問題を考えよう。この問題を考えるに当って,次の補題を示そう.

<u>補題 2.3</u> $\mathfrak{A}$ が reductive であるとき, $\mathcal{J}$ の center は $\mathfrak{A}''$ に含まれる.

証明 P を $\mathcal{J}$ の任意の central projection とし,その値域を M とする. $M \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}'$ であることを示そう. $A \in \mathfrak{A}'$ を任意にとり $\{Ax \mid x \in M\}$ の閉包を M_1 とすれば, $M_1 \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}$ である. M_1 への projection を Q とし, $Q_1 = Q - PQ$ とすれば, $\mathfrak{A}$ が reductive であるから, $Q \in \mathcal{J}$ でかつ Q_1 は P と直交する.

$$(Q_1 A P)^2 = 0$$

であるから, [4, Lemma 9.2] により, $Q_1AP \in \mathfrak{A}^{*\prime}$ である. したがって $Q_1AP \in \mathcal{J}$ となり, Q_1AP は P と可換である. ゆえに

$$Q_1AP = Q_1APP = PQ_1AP = 0$$

これは $Q_1 = 0$ であることを示している. ゆえに $PQ = Q$. すなわち $M_1 \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}'$. 同様にして

$$(I - P)H \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}'$$

が示される. したがって $P \in \mathfrak{A}''$ をうる. P は $\mathcal{J}$ の任意の

central projection であったから補題が示された.

Hの部分空間Mが von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ を約するとき, $\mathfrak{A}|M$ はまた von Neumann algebra である. $\mathfrak{A}$ が reductive の場合, $\mathfrak{A}|M$ の弱閉包がまた reductive であることは容易に示されるが

$\mathfrak{A}|M$ が弱閉であるか

という問題は未解決である. P が $\mathcal{J}$ の central projection であれば

$$\mathcal{J}_P = \mathfrak{A}_P' \wedge (\mathfrak{A}^*)_P'$$

であることを注意しておく.

<u>定理 2.4</u> $\mathfrak{A}$ が reductive で, $\mathcal{J}_P$ が可換でかつ infinite uniform multiplicity であるような central projection が存在しないとき, $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{*\prime}$ $(= \mathcal{J})$ である.

証明 補題 2.3 から, $\mathcal{J}$ の central projection P は $\mathfrak{A}'$ に属するから

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_P' \oplus \mathfrak{A}_{I-P}' = (\mathfrak{A}_P)' \oplus (\mathfrak{A}_{I-P})'$$
$$= (\overline{\mathfrak{A}_P})' \oplus (\overline{\mathfrak{A}_{I-P}})'$$

したがって, $\mathcal{J}$ が pure type の場合に定理を示せばよい.

$\mathcal{J}$ が I_∞, II_∞, III 型の場合は, 定理 2.1 から, $\mathfrak{A}$ が self-adjoint であり, $\mathcal{J}$ も self-adjoint である.

$\mathcal{J}$ が II_1 型の場合

$$P_1 \sim P_2, \quad P_1 + P_2 = I$$

をみたす互いに直交する $\mathcal{J}$ の projection P_1 と P_2 が存在する．$\mathcal{B} = \mathcal{O}\!\mathcal{L}_{P_1}$ とすれば

$$\mathcal{O}\!\mathcal{L} = \mathcal{B}^{(2)}, \quad \mathcal{O}\!\mathcal{L}' = M_2(\mathcal{B}')$$

ゆえに，$\mathcal{O}\!\mathcal{L}'$ が self-adjoint であることを示すには，$\mathcal{B}'$ が self-adjoint であることを示せばよい．$T \in \mathcal{B}'$ とすれば，T は $K = P_1 H$ 上の作用素で

$$M = \{ (x \oplus Tx) \mid x \in K \}$$

は $\mathcal{B}^{(2)}$ で不変である．$\mathcal{B}^{(2)}$ は reductive であるから，M は $\mathcal{B}^{(2)}$ を約する．ゆえにすべての $B \in \mathcal{B}$ に対して

$$(B^*)^{(2)}(x \oplus Tx) = (B^* x, B^* T x) \in M$$

これは

$$B^* T = T B^*$$

がすべての $B \in \mathcal{B}$ に対してなりたつことを示している．ゆえに $T \in (\mathcal{B}^*)'$．したがって $T^* \in \mathcal{B}'$ をうる．すなわち $\mathcal{B}'$ は self-adjoint である．

$\mathcal{J}$ が I_n 型 $(2 < n < \infty)$ の場合は上と同様にして証明できる．$\mathcal{J}$ が I_1 型の場合について示そう．$\mathcal{J}$ は uniform multiplicity n $(n < \infty)$ であると仮定して一般性を失なわない．このとき

$$\mathcal{J} = \mathcal{B}^{(n)}, \quad H = K^{(n)}$$

と仮定できる．ここに$\mathcal{B}$はK上の maximal abelian self-adjoint algebra である．いま$T \in \mathfrak{A}'$とすれば，補題2.3から$T \in \mathcal{I}'$である．$n = 1$の場合は，$\mathcal{I}$は maximal abelian であるから$T \in \mathcal{I}$．すなわち$\mathfrak{A}' \in \mathcal{I}$で，$\mathfrak{A}'$は self-adjoint である．$n > 1$とすれば，$\mathcal{I}' = M_n(\mathcal{B})$であるから

$$T = (T_{ij}),\quad T_{ij} \in \mathcal{B}\quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

と表わせる．[4, Theorem 7.20] から

$$U T U^* = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ 0 & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & S_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix},\quad S_{ij} \in \mathcal{B}$$

となるような$\mathcal{I}'$のユニタリ作用素Uが存在する．$U\mathfrak{A}U^*$は reductive で，その invariant algebra は$U\mathcal{I}U^* = \mathcal{I}$である．ゆえに，あらかじめ$\mathfrak{A}$として$U\mathfrak{A}U^*$を考えることにより，$i > j$ならば$T_{ij} = 0$と仮定して一般性を失なわない．

いま

$$T' = T - T_{11}^{(n)}$$

とすれば，$T' \in \mathfrak{A}'$であるから

$$M = \mathcal{R}(T') \in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}$$

しかるに，T'の第1列はすべて0であるから，任意の$x \in K$に対して$(x, 0, \cdots, 0) \in M$．これは$M = H$であることを示

している．すなわち $T'=0$．ゆえに $T=T_{11}\in\mathfrak{J}$ をうる．これは $\mathfrak{A}'=\mathfrak{J}$ であることを示している．したがって $\mathfrak{A}'$ は self-adjoint である．

3 <u>Characteristic manifols</u> $\mathfrak{A}\subset B(H)$ を algebra とし，$R(\mathfrak{A})$ を $\mathfrak{A}$ より生成される von Neumann algebra とする．

<u>定理 3.1</u> ある $k\,(\neq 1)$ に対して，$\mathfrak{A}^{(k)}$ の任意の characteristic manifold が $R(\mathfrak{A})^{(k)}$ で不変ならば，$\mathfrak{A}$ は $R(\mathfrak{A})$ で弱稠密である．

証明　補題 1.1 から

$$M\in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(n)} \Rightarrow M\in \mathrm{Lat}\,R(\mathfrak{A})^{(n)} \quad (n=1,2,\cdots)$$

を示せばよい．補題 1.2 から，M をグラフ部分空間として一般性を失なわない．

$$M=\{x\oplus T_2x\oplus\cdots\oplus T_nx \mid x\in\mathfrak{D}\}$$

とする．いま

$$M_1=\{\overbrace{x\oplus x\oplus\cdots\oplus x}^{k}\oplus T_2x\oplus\cdots\oplus \overbrace{x\oplus\cdots\oplus x}^{k}\oplus T_nx \mid x\in\mathfrak{D}\}$$

とすれば，$M_1\in \mathrm{Lat}\,\mathfrak{A}^{(kn)}$ である．ゆえに

$$M_i=\{x\oplus\cdots\oplus x\oplus T_ix \mid x\in\mathfrak{D}\}\in \mathrm{Char}\,\mathfrak{A}^{(k)}$$

$(i=2,3,\cdots,n)$ である．したがって M_i は $R(\mathfrak{A})^{(k)}$ で不変である．ゆえに，任意の $B\in R(\mathfrak{A})$ に対して

$$BT_i\subseteq T_iB \quad (i=2,3,\cdots,n)$$

これはMが$R(\mathfrak{A})^{(n)}$で不変であることを示している.

Voiculescu [5]は$\mathfrak{A}^{(3)}$で不変な$H^{(3)}$の任意の有界作用素の値域が$R(\mathfrak{A})^{(3)}$で不変ならば, $\mathfrak{A}$は$R(\mathfrak{A})$で弱稠密であることを示したが, 定理はその一般化になっている.

以下この節では, $\mathfrak{A}$に対して条件:

(C) Char $\mathfrak{A}$ の任意の manifold は$R(\mathfrak{A})$で不変である

を付加して考えよう. 容易にわかることは

(i) $\mathfrak{A}$が弱閉で(C)をみたせば$\mathfrak{A}$は reductive である.

(ii) $\mathfrak{A}$が(C)をみたせば, $\mathfrak{A}$の弱閉もまた(C)をみたす.

<u>定理 3.2</u> $\mathfrak{A}$は弱閉でかつ条件(C)をみたすとする. さらに

$$\sum P_i = I, \quad P_i \sim P_j$$

をみたす$\mathcal{I}$の互いに直交する projection $\{P_i\}$が存在すれば, $\mathfrak{A}$は self-adjoint である.

証明 $\{P_i\}$を有限個の集合と仮定して一般性を失なわない. これを$\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$とする. $\mathcal{B} = R(\mathfrak{A})_{P_1}$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_{P_1}$とすれば$R(\mathfrak{A}) = \mathcal{B}^{(k)}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1^{(k)}$であり, PH上で$\mathcal{B} = R(\mathfrak{A}_1)$である. したがって, $\mathfrak{A}$が(C)をみたすことから, $\mathfrak{A}_1^{(k)}$の characteristic manifold は$\mathfrak{A}$の characteristic manifold で$\mathcal{B} = R(\mathfrak{A}_1)^{(k)}$で不変である. ゆえに$\mathfrak{A}_1$は$R(\mathfrak{A}_1)$で弱稠密であり, これは$\mathfrak{A}$が$R(\mathfrak{A})$で弱稠密であることを示している. $\mathfrak{A}$は弱閉であった

から $\mathfrak{A} = R(\mathfrak{A})$. すなわち $\mathfrak{A}$ は self-adjoint である.

<u>系 3.3</u>　$\mathfrak{A}$ が弱閉で (c) をみたし, $\mathcal{I}$ が I_n 型（n は奇数）の部分を含まないならば, $\mathfrak{A}$ は self-adjoint である.

<u>系 3.4</u>　$\mathfrak{A}$ が弱閉で (c) をみたし, $\mathcal{I}$ が I_n 型（$n \geq 2$）であれば, $\mathfrak{A}$ は self-adjoint である.

文　献

[1] E A Azoff, Invariant linear manifolds and the self-adjointness of operator algebras, to appear

[2] C Foias, Invariant para-closed subspaces, Indiana Univ. Math. J., 21(1972) 887-906

[3] T. B. Hoover, Operator algebras with reducing invariant subspaces, Pacific J. Math., 44(1973) 173-179.

[4] H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces, Berlin Springer verlag, (1973)

[5] D. Voiculescu, Sur les sous-espaces parafermes invariants d'une algebre de von Neumann, Bull. Sc. Math., 2^{e} serie, 96(1972) 161-168